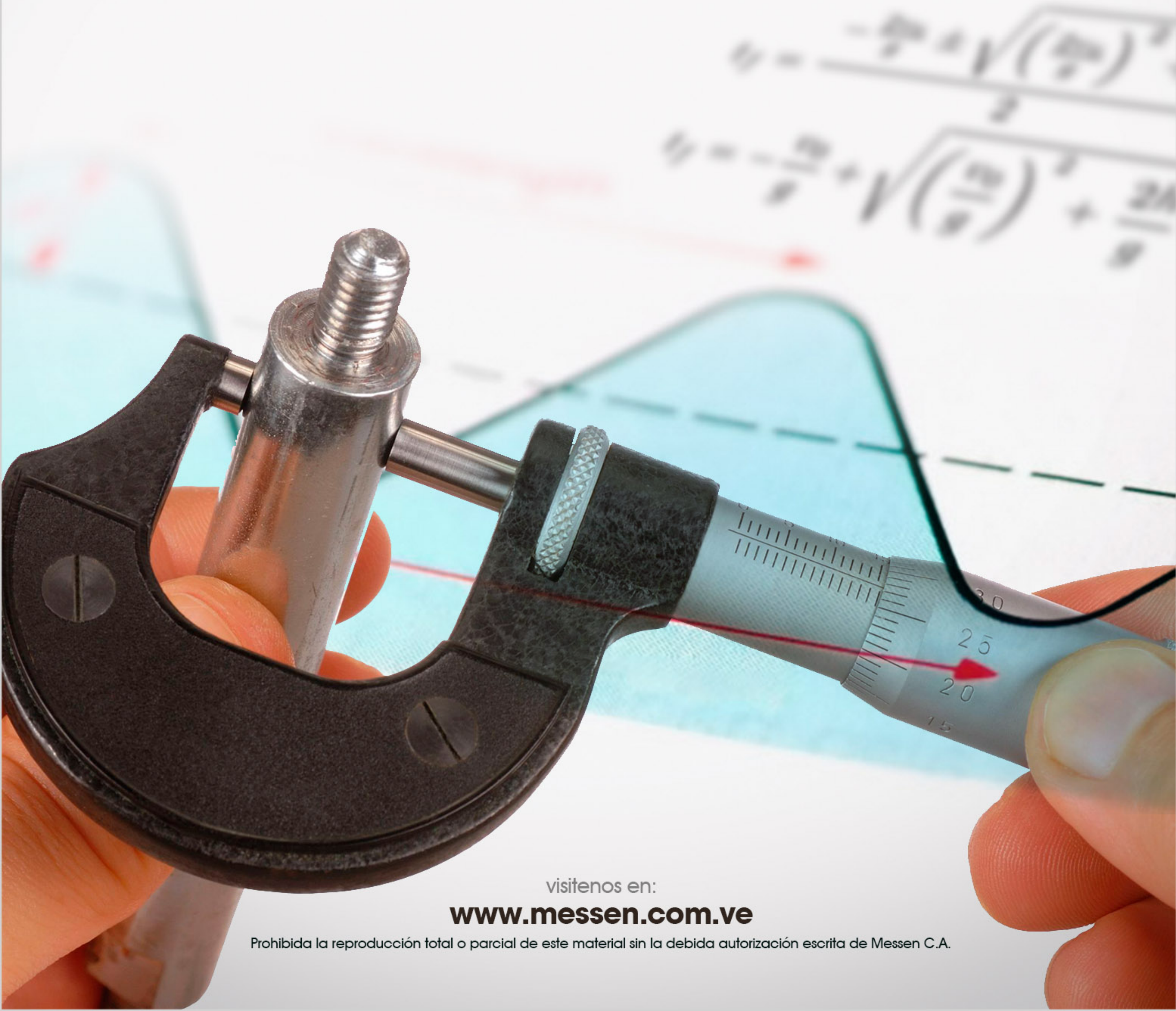
CURSO DE: INCERTIDUMBRE DE LAS MEDICIONES

Por: Dr-Ing. Fidel Fernández



Otros Cursos:

Inscritos en el
Ministerio del Poder Popular
para la **Educación y el INCES**

Ministerio
del Poder Popular
para la **Educación**

messen
GERENCIA DE LA MEDICIÓN

NOMBRE DEL CURSO: INCERTIDUMBRE DE LAS MEDICIONES
ELABORADO POR: FIDEL FERNÁNDEZ

Autoedición

Ficha técnica

NOMBRE DEL CURSO: Incertidumbre de las Mediciones.

DURACIÓN: 24 horas

OBJETIVO GENERAL: Aplicar los análisis y cálculos necesarios para la estimación de la incertidumbre de una serie de datos de medición provenientes de mediciones fisicoquímicas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1- Conocer la importancia de la medición y del proceso de la medición.
2- Conocer la definición e importancia de la Incertidumbre.
3- Analizar la definición de Incertidumbre Estándar y clasificar los tipos de incertidumbre estándar.
4- Determinación de la incertidumbre estándar combinada.
5- Analizar la incertidumbre expandida.
6- Describir el reporte de la incertidumbre.

CONTENIDO:

1- Conceptos Básicos: conceptos básicos en el ámbito de la Metrología, definición de Incertidumbre.
2- Incertidumbre Estándar: Estimación de la incertidumbre estándar y sus tipos.
3- Incertidumbre Estándar combinada: Incertidumbre Estándar combinada y su determinación.
4- Incertidumbre Expandida: Determinación de la Incertidumbre Expandida, elección del factor de cobertura.
5- Reporte de la Incertidumbre: Reporte de la Incertidumbre Estándar combinada, reporte de la incertidumbre expandida.
6- Resumen de Procedimientos para la evaluación de la incertidumbre.

METODOLOGÍA:

Exposición del Facilitador.

Ejercicios

Resolución de problemas prácticos.

Discusión de resultados.

Discusión de casos y situaciones.

DIRIGIDO A: Profesionales y técnicos que prestan servicio en el área de calidad y producción, mantenimiento, laboratorio, instrumentación y metrología.

INSTRUCTOR: Dr. Fidel Fernández, Lic. Sheyla Jiménez, Lic. Luz Marina Daza, Lic. Eduardo Reyes.

Indice

Cuando reportamos el resultado de alguna magnitud física, es importante mostrar cualitativamente y cuantitativamente la calidad de ese resultado, de modo que se pueda determinar la confiabilidad de los resultados

El resultado de una medición es únicamente una estimación del valor de la magnitud específica sujeta a medición. Este resultado está completo únicamente cuando está acompañado por una declaración cuantitativa de su incertidumbre.

La incertidumbre es una medida cuantitativa de la calidad de mi medición, es decir, es la que me determina que tan buena es mi sistema de medición.

Capítulo 01

Conceptos Básicos

En este capítulo se expondrán los conceptos básicos, términos y definiciones que se usan con mayor frecuencia en el ámbito de la Metrología. Al final del capítulo se presentan un número limitado de definiciones utilizadas. En el vocabulario internacional de metrología (V.I.M.) se puede encontrar todas las definiciones, que dado lo limitado de este trabajo no se han incluido.

Medición

El objetivo de una medición es determinar el valor del *mensurando*, esto es, el valor de la magnitud específica que es medida. Una medición comienza entonces con especificación apropiada del mensurando, el *método de medición* y el *procedimiento de medición*. Su definición según el VIM V002:2007 viene dado como: proceso que consiste en obtener experimentalmente uno o varios valores que pueden atribuirse razonablemente a una magnitud.

En muchos casos, el resultado de una medición es determinado en base a repetidas observaciones. Las variaciones en los valores de las observaciones repetidas, se supone que provienen de la imposibilidad de mantener constante cada *magnitud de influencia* que afecte el resultado de medición.

El modelo matemático del procedimiento de medición que transforma el conjunto de observaciones repetidas en un resultado de medición, es de una importancia fundamental, debido a que además de las observaciones, incluye en la mayoría de los casos magnitudes de influencia que no se conocen con exactitud. Esta situación de desconocimiento contribuye a la incertidumbre del resultado de medición, a lo que se suma la variabilidad de las observaciones y toda aquella incertidumbre asociada con el modelo matemático en sí.

En general, el resultado de una medición es solo una aproximación o *estimado* del valor del mensurando. Una medición se considera completa cuando se acompaña con la declaración de la incertidumbre del estimado.

En la práctica, la definición o especificación del mensurando depende de la *exactitud* requerida en la medición. El mensurando debe estar definido con suficiente fidelidad relativa a la exactitud necesaria, de manera tal que para todos los propósitos prácticos su valor sea único. Ejemplo: Si se determina la longitud de una barra de acero de valor nominal de *1 m* con exactitud micrométrica, las especificaciones de medición deben incluir la temperatura y la presión barométrica a la cual se determina el valor de la longitud. Sin embargo, si la longitud se mide con una exactitud en el orden de los milímetros, las especificaciones anteriores no son en general necesarias.

Correcciones y Errores

En general, un procedimiento de medición tiene imperfecciones que originan un *error* en el resultado de medición. Tradicionalmente, se ha considerado que el error posee dos componentes: una componente *aleatoria* y una componente *sistemática*. Es de hacer notar, que el error es un concepto idealizado y no se puede conocer exactamente.

Los errores aleatorios provienen, presumiblemente, de variaciones temporales y espaciales impredecibles o estocásticas de las magnitudes de influencia. Los efectos de estas variaciones, aquí referidas como *efectos aleatorios*, originan variaciones en las observaciones repetidas del mensurando. El error aleatorio de un resultado de medición no puede ser compensado por una corrección, pero usualmente puede ser reducido al incrementar el número de observaciones. La esperanza matemática o valor esperado del error aleatorio es cero.

La *desviación estándar experimental* de la *media aritmética* o *promedio* de una serie de observaciones no es el error aleatorio de la media, a pesar de que es referido de esta manera en algunas publicaciones acerca de incertidumbre en las mediciones. .

La desviación estándar experimental, es una medida de la *incertidumbre* de la media debido a efectos aleatorios. El valor exacto del error en la media producido por estos efectos aleatorios no puede ser conocido.

En el estudio que se propone, se debe poner especial empeño y gran cuidado en distinguir los términos “error” e “incertidumbre”. Ellos no son, en manera alguna, sinónimos. Estos no deben ser confundidos, bajo ninguna circunstancia, ya que representa conceptos totalmente diferentes.

El error sistemático proviene de efectos reconocidos de una magnitud influyente conocidos como *efectos sistemáticos*, los cuales pueden ser cuantificados. Cuando un error sistemático tiene un valor significativo de acuerdo a la *exactitud* requerida en la medición, puede aplicarse una *corrección* o *factor de corrección*. El error sistemático, como el error aleatorio, no puede eliminarse, pero se puede reducir en la mayoría de los casos. Se supone que después de la corrección, la esperanza matemática o valor esperado del error proveniente del efecto sistemático es cero.

El resultado de una medición después de la corrección por efectos sistemáticos reconocidos, es aún, solo la estimación del valor del mensurando debido a la presencia de incertidumbres por efectos aleatorios y de correcciones imperfectas de los resultados por efectos sistemáticos.

Se supone, que un resultado de medición se expresa luego que se ha tenido el cuidado de aplicar todas las correcciones a los efectos sistemáticos reconocidos.

Incertidumbre

La incertidumbre del resultado de una medición refleja el estado del exacto conocimiento del valor del mensurando. El resultado de una medición después de corregir todos los efectos sistemáticos conocidos es todavía un *estimado* del valor del mensurando. Esto es así, debido a la incertidumbre proveniente de los efectos aleatorios y de la corrección imperfecta de los efectos aleatorios en el resultado. La definición formal de incertidumbre en el VIM V002:2007 es: parámetro que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a un mensurando, con base en la información usada

NOTAS

1. La incertidumbre de medida incluye componentes provenientes de efectos sistemáticos, tales como componentes asociadas a correcciones y a los valores asignados de patrones de medida, así como a la incertidumbre intrínseca. Algunas veces no se corrigen los efectos sistemáticos y en su lugar se tratan como componentes de la incertidumbre.

2. El parámetro puede ser por ejemplo, una desviación estándar en cuyo caso se denomina incertidumbre estándar de medición (o un múltiplo de ella), o el semiancho de un intervalo a un nivel de confianza determinado.

3. En general la incertidumbre de medida comprende muchos componentes. Algunos de éstos pueden ser evaluados por una evaluación tipo A de la incertidumbre de medida a partir de la distribución estadística de valores que provienen de series de mediciones y pueden caracterizarse por desviaciones estándar experimentales. Las otras componentes, que pueden ser evaluadas por evaluación tipo B de la incertidumbre de medida, pueden caracterizarse también por desviaciones estándar, evaluadas a partir de funciones de densidad de probabilidad con base en la experiencia o en otra información.

El resultado de una medición (luego de corregido) podría estar inmensurablemente cerca del valor del mensurando (por ello tendría un error muy pequeño) y aún así tendría una incertidumbre grande. De esta forma, la incertidumbre no puede ser interpretada como un valor representativo del error desconocido remanente.

En la práctica existen muchas fuentes posibles de incertidumbre de una medición, entre ellas podemos mencionar:

- Definición incompleta del mensurando
- Realización imperfecta de la definición del mensurando
- Muestreos no representativos
- Conocimiento inadecuado de los efectos de las condiciones ambientales sobre las mediciones o medición inadecuada de dichas condiciones ambientales
- Errores de apreciación del operador en la lectura de instrumentos analógicos
- Resolución finita del instrumento o umbral de discriminación finito
- Valores inexactos de constantes y otros parámetros obtenidos de fuentes externas y usados en algoritmos de reducción de datos
- Aproximaciones y suposiciones incorporadas en los métodos y procedimientos de medición
- Variaciones en observaciones repetidas del mensurando bajo condiciones aparentemente iguales.

Estas fuentes de incertidumbre no son necesariamente independientes, y algunas de las fuentes pueden contribuir en conjunto a otra. Es de hacer notar que un efecto sistemático no reconocido no puede ser tomado en cuenta en la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición pero contribuye de manera significativa a su error.

Algunos Términos y Definiciones

Método de medición

Secuencia lógica de operaciones genéricas para la ejecución de una medición de acuerdo a un principio dado, por ejemplo: método de comparación directa, método diferencial, método de sustitución. Según el VIM V002:2007 descripción genérica de una organización lógica de operaciones usadas en una medición.

Procedimiento de medición

Conjunto de operaciones en términos específicos, utilizadas en la ejecución de mediciones particulares de acuerdo a un método dado. El procedimiento de medición está documentado y en el documento se presenta con un grado suficiente de detalles, que permite a cualquier operador realizar la medición sin información adicional. El VIM V002:2007 lo define como: descripción detallada de una medición de acuerdo a uno o más principios de medida y a un método de medida dado, con base en un modelo de medida y que incluye los cálculos para obtener un incertidumbre de medida.

Magnitud de influencia: Magnitud que no es el objeto de medición, pero que influye en el valor del mensurando o en la indicación del instrumento de medición.

Valor verdadero (de una magnitud): Es el valor que caracteriza una cantidad perfectamente definida, en las condiciones en las cuales existe cuando la magnitud es considerada. Su definición formal según el VIM V002:2007: conjunto de un número y de una referencia que constituyen la expresión cuantitativa de una magnitud.

Valor convencionalmente verdadero: Valor atribuido a una magnitud específica aceptado, algunas veces por convención, que tiene una incertidumbre apropiada para un propósito dado y que puede sustituir al valor verdadero en esas condiciones.

Exactitud de medición: Es la cercanía de acuerdo entre el resultado de medición y el valor (convencionalmente) verdadero del mensurando. Su definición en el VIM V002:2007 proximidad de concordancia entre valores medidos de una magnitud que son atribuidos al mensurando.

Error (de medición): El error de medición resulta de la diferencia entre el resultado de medición menos el *valor verdadero* del mensurando. El VIM V002:2007 lo define como: diferencia entre un valor medido de una magnitud y un valor de referencia.

Debido a que el valor verdadero no puede ser conocido, en la práctica se usa el *valor convencionalmente verdadero*. Para distinguirlo del *error relativo* se le denomina también error absoluto.

Error relativo: Error de medición dividido por el valor verdadero del mensurando. Ya que el valor verdadero no puede ser conocido se sustituye este por el valor convencionalmente verdadero.

Corrección: Valor sumado algebraicamente al resultado sin corregir de una medición para compensar un error sistemático.

Factor de corrección: Factor numérico por el que se multiplica el resultado sin corregir de una medición para compensar un error sistemático.

Trazabilidad Metrológica: Propiedad de un resultado de medición por la cual el resultado puede ser relacionado a una referencia establecida mediante una cadena ininterrumpida.

y documentada de calibraciones, cada una de las cuales contribuye a la incertidumbre de medida.

Incertidumbre Estándar

El resultado de una medición es únicamente una estimación del valor de la magnitud específica sujeta a medición. Este resultado está completo únicamente cuando está acompañado por una declaración cuantitativa de su incertidumbre. El VIM V002:2007 define la incertidumbre estándar como: incertidumbre de medida expresada como una desviación estándar.

En el caso de mediciones directas se puede decir que intervienen dos objetos bien diferenciados: *el mensurando*, es decir, la magnitud que se quiere medir y *el valor observado* de acuerdo a las posibilidades y limitaciones de los instrumentos de medición. Sin embargo, cada proceso de medición no escapa a magnitudes llamadas de *magnitudes de influencia,* las cuales introducen en la mayoría de los casos correcciones a los valores de medición.

En otros casos el mensurando *Y* no puede ser determinado directamente, ya que depende de otras *N* magnitudes $X_1, X_2,\ldots,X_N$ a través de una relación funcional *f*, esto es:

$$\boxed{Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)}$$

Las magnitudes $X_1, X_2,\ldots,X_N$, de las que depende *Y*, pueden ser vistas como mensurandos que a su vez pueden depender de otras magnitudes. Estas pueden incluir correcciones y factores de corrección de efectos sistemáticos, que pudiesen conducir a relaciones funcionales complicadas que, tal vez, nunca podrían expresarse en forma analítica. No obstante, en este caso se puede hacer una determinación empírica utilizando cualquier medio o método científico válido.

Para efectos de nomenclatura se denotarán por mayúsculas las magnitudes físicas medida y con letras minúsculas correspondientes su estimados.

Un estimado del mensurando *Y*, denotado por *y*, es obtenido de la ecuación funcional, introduciendo como argumentos los estimados de las magnitudes de entrada $(x_1,x_2,\ldots,x_N)$. En el caso que alguno de estos estimados provenga de un conjunto de observaciones de la magnitud dada, entonces el estimado de X_i vendrá dado por $\overline{x}_i$.

A manera de ejemplo se pueden citar una diversidad de magnitudes físicas que se miden de manera indirecta a través de una relación funcional:

1. Medición del volumen *V* de un cilindro macizo: el volumen de un cilindro depende de la altura *h* y del diámetro *d*. Como magnitud de influencia fundamental esta el valor de la temperatura *t* que puede ser introducida como un factor de compensación si se conoce la temperatura actual y la temperatura de referencia. Matemáticamente,

$$V = f(h, d, t) = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4}[1 + \alpha(t - t_0)]$$

   Es de hacer notar que debe conocerse el valor del coeficiente de expansión térmica del material α y el valor de la constante π, estos por ejemplo, a través de una tabla que permita tomar suficientes cifras significativas.

2. Determinación de la potencia *P* disipada a la temperatura *t* por un resistor R_0, sometido a una diferencia de potencial *V* aplicada a sus terminales: el valor de resistencia determinado a una temperatura de referencia t_0, depende de las variaciones de temperatura y está considerado en el coeficiente de resistividad con la temperatura α, de esta manera la relación funcional está dada por:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = \frac{V^2}{R_0}\left[1 + \alpha(t - t_0)\right]$$

3. Medición de la longitud de una pieza metálica con un vernier: El mensurando en este caso es la longitud de la pieza que denotaremos por *D* y su estimado $d_i$que esta dado por la lectura que se obtiene del instrumento de medición, matemáticamente:

$$L = d$$

4. En este modelo matemático se puede apreciar que no se considera que alguna magnitud de influencia afecte el resultado de medición.

5. Asignación de un valor de la escala de un instrumento de medición utilizando las lecturas L_p de un patrón: en este caso el modelo matemático es:

$$L_i = L_p + \Delta L_p$$

   Siendo ΔL_p las correcciones de las indicaciones del patrón reportadas es su certificado de calibración.

El modelo matemático de la medición expresado por la relación funcional, debe ser interpretado como una función que contiene todas las magnitudes de las que depende el mensurando. Allí se incluyen todas las correcciones y factores de corrección que pueden contribuir con componentes significativos de incertidumbre al resultado de medición. Ella no debe expresar simplemente una ley física, sino también reflejar lo que verdaderamente ocurre en el proceso de medición.

La desviación estándar estimada del mensurando y, llamada *incertidumbre estándar combinada*, denotada por $u_c(y)$, se determina de la desviación estándar de cada estimado x_i, llamado *incertidumbre estándar* y denotado por $u(x_i)$.

Cada estimado x_i y su incertidumbre estándar $u(x_i)$ se obtiene de una distribución de posibles valores de la magnitud X_i. Esta distribución de probabilidad, se basa con frecuencia en una serie de observaciones $X_{i,k}$ de X_i, o puede provenir de la asignación intuitiva o a priori de una distribución de probabilidad. Se debe reconocer, que en ambos casos las distribuciones son modelos que se utilizan para representar el estado de nuestro conocimiento del sistema de medición bajo estudio.

La incertidumbre del resultado de una medición estará compuesta por varias componentes que pueden ser discriminadas de acuerdo al método usado para estimar sus valores numéricos:

1. *Aquellas evaluadas por métodos estadísticos.*
2. *Aquellas cuyas funciones de distribución se asignan a priori de acuerdo al conocimiento del sistema.*

Evaluación tipo A de la Incertidumbre Estándar

La evaluación de tipo A de la incertidumbre estándar, es el método de evaluación basado en el análisis estadístico de una serie de observaciones. La misma puede ser aplicada cuando se han realizado varias observaciones independientes de la magnitud X_i bajo las mismas condiciones, usando el método de los mínimos cuadrados para ajustar una curva y estimar las incertidumbres de su pendiente e intercepto o realizando un análisis de varianza con el fin de identificar y cuantificar los efectos aleatorios y sistemáticos en ciertas clases de mediciones o en comparaciones de resultados. Según el VIM V002:2007 la evaluación tipo A de la incertidumbre se define como: la evaluación de una componente de la incertidumbre de medida mediante un análisis estadístico de los valores de la magnitud obtenidos bajo condiciones de medición definidas.

Notas

1. Algunos tipos de condiciones de medición son condición de repetibilidad de medición, condición de precisión intermedia de medición y condición de reproducibilidad de medición
2. Para información sobre análisis estadístico ver por ejemplo la GUM.

En la mayoría de los casos, la mejor estimación de la esperanza o valor esperado de una magnitud que varia aleatoriamente y de lo cual se han obtenido *n* observaciones independientes bajo las mismas condiciones de medición, es la media de las observaciones y se usa para estimar al mensurando, así:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{i,k}$$

Las observaciones individuales $x_{i,k}$ difieren debido a variaciones aleatorias de las magnitudes de influencia o del propio instrumento de medición, los cuales se denominan globalmente *efectos aleatorios*. La varianza de las observaciones, con la cual se estima σ^2 de la distribución de probabilidad de *X*, se obtiene de:

$$s^2(x_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - \bar{x})^2$$

A pesar de que la varianza es el parámetro fundamental asociado a la dispersión, la desviación estándar es más conveniente debido a que tiene la mismas unidades del mensurando y es más ilustrativa en la mayoría de los casos.

En general, para la mayoría de las mediciones se utiliza la varianza de la media $\sigma^2(\bar{X})$ como el valor más representativo de lo que ocurre en el sistema de medición. El mejor estimador de la varianza de la media está dado por:

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x_i)}{n}$$

La varianza $s^2(\bar{x})$ y la desviación estándar experimental de la media $s(\bar{x})$, cuantifican que tan bien la media $\bar{X}$ estima la esperanza matemática μ_x y por tanto se puede utilizar como una medida de la incertidumbre en la determinación del valor medio $\bar{x}$.

Para una magnitud física x_i determinada de n observaciones $x_{i,k}$, la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de su estimado $x_i = \overline{X}_i$ está dada por:

$$u(\overline{x}_i) = s(\overline{x}_i)$$

con varianza $s^2(x_i)$. Por conveniencia, $u^2(\overline{x}_i) = s^2(\overline{x}_i)$ y $u(\overline{x}_i) = s(\overline{x}_i)$ se denominan ***varianza e incertidumbre estándar tipo A***.

Es de hacer notar que la diferencia entre $\sigma^2(\overline{x}_i)$ y $s^2(\overline{x}_i)$ se debe considerar al momento de establecer intervalos de confianza. En este caso, si la función de distribución de x_i es la distribución normal, la diferencia se tiene en cuenta a través de la utilización de la función de distribución de Student.

Para procedimientos de medición bien caracterizados bajo control estadístico, se puede disponer de una varianza combinada o ponderada $s^2(p)$ o de su correspondiente desviación estándar $s\ (p)$. En estos casos, la varianza de la media de n observaciones repetidas independientes es $s^2_{(p)}/n$ y la incertidumbre estándar será $u = s_p \big/ \sqrt{n}$.

En algunas ocasiones el valor estimado x_i de la magnitud X_i se obtiene a partir de una curva que ha sido ajustada de datos experimentales por el método de los mínimos cuadrados. La varianza y la incertidumbre estándar resultante del ajuste de los parámetros caracterizan la curva y la incertidumbre de cualquier punto que se prediga puede ser determinada por métodos estadísticos.

Si ocurre que la variaciones aleatorias del mensurando estén correlacionadas, por ejemplo, en tiempo, la media y la desviación estándar de la media como se han establecido hasta ahora pueden ser unos estimadores estadísticos inadecuados. Allí las observaciones deben ser analizadas usando métodos estadísticos especiales, diseñados para tratar series correlacionadas aleatorias de mediciones.

En los niveles más bajos de la cadena de calibración, en donde frecuentemente se asume que los patrones de referencia son conocidos exactamente, debido a que son calibrados regularmente por un laboratorio nacional o primario, la incertidumbre del resultado de una calibración puede ser simplemente una incertidumbre estándar tipo A basada en una desviación estándar ponderada del procedimiento de medición.

Evaluación tipo B de la Incertidumbre Estándar

En el VIM V002:2007 se define como evaluación de una componente de la incertidumbre de medida por medios distintos a una evaluación tipo A de la incertidumbre de medida

Para cualquier magnitud X_i de la cual se tenga un estimado x_i, que no se haya obtenido de repetidas observaciones, entonces la varianza estimada $u^2(x_i)$ o la incertidumbre estándar $u(x_i)$ es evaluada mediante consideraciones, usando toda la información relevante disponible. La ponderación de la información puede incluir:

- *Datos previos de medición.*
- *Experiencia o conocimiento general del comportamiento y propiedades de materiales relevantes e instrumentos de medición.*
- *Especificaciones del fabricante.*
- *Datos proporcionados por certificados de calibración u otros.*
- *Incertidumbres asignadas a datos de referencia tomados de manuales.*

El uso adecuado de la información disponible para una evaluación tipo B de la incertidumbre estándar requiere de una visión basada en la experiencia y en el conocimiento general y es una habilidad que puede aprenderse con la práctica. Debe reconocerse que una evaluación tipo B de incertidumbre estándar puede ser tan confiable como una evaluación tipo A, especialmente en situaciones donde una evaluación tipo A se base en un número pequeño de observaciones estadísticamente independientes.

Ejemplos de evaluaciones tipo B

A continuación se analizarán algunas situaciones en donde la incertidumbre estándar debe ser evaluada, en base a la información disponible, en algunos casos se encuentran reportados valores de incertidumbre no normalizados, que deben ser analizados con cuidadosamente:

1. Convertir una incertidumbre expresada como un múltiplo de una desviación estándar estimada a una incertidumbre estándar, dividiéndola por este múltiplo:

   Si el estimado x_i se toma de una especificación del fabricante, certificado de calibración, manual u otra fuente y su incertidumbre asignada se establece como un múltiplo particular de una desviación estándar, la incertidumbre estándar $u(x_i)$ es simplemente el valor asignado dividido por el multiplicador y la varianza estimada $u^2(x_i)$ es el cuadrado de dicho cociente.

   Ejemplo: Un certificado de calibración establece que la masa m_s de un patrón de acero inoxidable de valor nominal de *1 kg* es *1 000,000 325 g* y que "la incertidumbre de este valor es $240\ \mu g$ al nivel de 3 desviaciones estándar": la incertidumbre estándar de la masa patrón es simplemente $u(m_s) = (240\ \mu g)/3 = 80\ \mu g$. Esto corresponde a una *incertidumbre estándar relativa* $u(m_s)/m_s$ de $80{\cdot}10^{-9}$ y la varianza estimada es $u^2(m_s) = (80\ \mu g)^2 = 6{,}4{\cdot}10^{-9}\ g^2$.

2. Convertir una incertidumbre dada que define un intervalo de confianza con un nivel de confianza declarado (como 90, 95 o 99%), a una incertidumbre estándar.

   Tratando la incertidumbre declarada como si se hubiera usado una distribución normal para calcularlo (a menos que se indique otra cosa) y dividiéndolo por el factor apropiado para esta distribución. Los factores correspondientes a los niveles de confianza de 90, 95 y 99% son 1,645; 1,960 y 2,576 respectivamente (ver tabla 2.1).

Ejemplo 1: Un certificado declara que la resistencia de un resistor patrón R_S de valor nominal de *10 ohm* es *10,000 742* Ω a 23 ºC y que "la incertidumbre de este valor a un nivel de confianza del 99% es *129* $\mu\Omega$". La incertidumbre estándar del resistor puede obtenerse de $u(R_S) = (129\ \mu\Omega)/2{,}58 = 50\ \mu\Omega$, que corresponde a una incertidumbre estándar relativa de $u(R_S)/R_S$ de $5{,}6 \cdot 10^{-6}$. La varianza estimada es $u^2(R_S) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-9}\ \Omega^2$.

Ejemplo 2: De un certificado de calibración: la incertidumbre de la microbalanza 10 mg se declara como: 0,008 mg con un nivel de confianza del 95,4%. Tenemos que la incertidumbre estándar viene dada como:

$$u_{(m)} = \frac{0{,}008}{2} = 4{,}0\mu g$$

3. Modelar la magnitud X_i en cuestión por una distribución normal y estimar los límites superior a_+ e inferior a_- de la distribución de tal forma que la mejor estimación x_i de la cantidad sea $(a_+ - a_-)/2$ y que corresponda a un nivel de confianza del 50%.

   Si la mitad del ancho del intervalo se denota como $\mathrm{a} = (\mathrm{a}_+ - \mathrm{a}_-)/2$, se puede tomar como valor estimado de la incertidumbre estándar $u(x_i) = 1{,}48 \cdot a$ varianza $u^2(x_i) = (1{,}48 \cdot a)^2$, ya que para una distribución normal con esperanza matemática μ y desviación estándar σ, el intervalo $\mu \pm \sigma/1{,}48$ incluye el 50% de la distribución.

   Ejemplo: Un mecánico al determinar las dimensiones de una pieza , estima que su valor de longitud, con probabilidad *0,5* en el intervalo que va de *10,07 mm* a *10,15 mm* y reporta que $l = (10{,}11 \pm 0{,}04)\,\mathrm{mm}$, queriendo decir que *0,04 mm* define un intervalo con un nivel de confianza del 50%. Entonces $a = 0{,}04\ mm$ y se supone que la distribución es normal para los posibles valores de la longitud, la incertidumbre estándar estimada estará dada por $u(l) = 1{,}48 \cdot 0{,}04\ mm = 0{,}06\ mm$ y $u^2(l) = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ mm^2$.

4. Conociendo o pudiendo determinar los límites superior a_+ e inferior a_- para la magnitud X_i en cuestión y estableciendo que la probabilidad de que el valor de X_i esta en el intervalo de a_- hasta a_+ es igual a 1 para todos los propósitos prácticos.

   Si no se cuenta con información específica del comportamiento de la magnitud X_i dentro del intervalo, sólo se puede suponer que el valor de Xi tiene la misma probabilidad de estar en cualquier sitio del intervalo. La distribución uniforme modela esta magnitud. Entonces x_i, el valor estimado del mensurando X_i, está en el punto medio del intervalo, es decir, $x_i = (a_+ - a_-)/2$, con varianza $u^2(x_i) = (a_+ - a_-)/12$. Si la diferencia entre los límites, $(a_+ - a_-)$ es igual a $2a$, el resultado anterior se puede escribir como:

$$u^2(x_i) = a^2/3$$

Ejemplos:

A. Un manual establece que el coeficiente de expansión lineal térmica del cobre puro a 20 ºC como $\alpha_{20}(Cu) = 16{,}52 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1} y declara simplemente que “el error de este valor no debería exceder de $0{,}40 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1}. Basándose en la información anterior, sólo se puede suponer que el valor de $\alpha_{20}(Cu)$ esté con igual probabilidad en el intervalo que va de $16{,}12 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1} a $16{,}92 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1} y que es poco probable que el valor $\alpha_{20}(Cu)$ se encuentre fuera de este intervalo. La varianza de esta distribución rectangular simétrica de valores posibles con un intervalo de medio ancho igual a $a = 0{,}40 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1}, es por tanto, $u^2(\alpha_{20}) = (0{,}40 \cdot 10^{-6}$ ºC$^{-1})^2/3 = 53{,}3 \cdot 10^{-12}$ ºC^{-2} y la incertidumbre estándar es $u(\alpha_{20}) = (0{,}40 \cdot 10^{-6}$ ºC$^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}23 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1}.

B. Para un voltímetro digital un fabricante establece que “entre uno y dos años después de la calibración del instrumento, su inexactitud en el rango de *1 V* es *$14 \cdot 10^{-6}$ el valor de la lectura del instrumento más $2 \cdot 10^{-6}$ del valor del rango*, escrito en forma compacta $\pm(0{,}001\ 4\%L_l + 0{,}000\ 2\%R)$”. Supóngase que el instrumento se usa 20 meses después de la calibración para medir en el rango de *1 V* un diferencia de potencia *V*. La media de un número de observaciones repetidas fue $\overline{V} = 0{,}928\ 571\ V$ con una incertidumbre estándar tipo A de $u(V) = 12\ \mu V$. La información para la evaluación tipo B de la incertidumbre estándar, proviene del fabricante del instrumento de medición, de allí se sabe que entre uno y dos años después de la calibración se establece una corrección $\Delta\overline{V}$ al valor de $\overline{V}$, donde la corrección tiene un valor esperado de *0* e igual probabilidad de estar en cualquier sitio del intervalo dado por $\Delta\overline{V} = \pm(0{,}001\ 4\%L_l + 0{,}000\ 2\%R)$. El valor de *a* de la distribución rectangular simétrica de los posibles valores de $\Delta\overline{V}$ es entonces: $a = [0{,}000\ 014 \cdot (0{,}928\ 571\ V)] + 0{,}000\ 002 \cdot (1\ V)] = 15\ \mu V$. La varianza y la incertidumbre estándar tipo B son: $u^2(V) = 75\ \mu V^2$ y $u(V) = 8{,}7\ \mu V$, respectivamente.

La distribución rectangular es un modelo razonable como única opción en ausencia de cualquier otra información. Pero si se sabe que los valores de la cantidad en cuestión son más probables de estar en el centro que en los extremos de los límites, se puede tener un mejor modelo usando una distribución normal o triangular.

En el caso que el límite inferior b_- y superior b_+ no sean simétricos con respecto a la estimación del mensurando x_i, y no se posee mayor información. Se puede utilizar una función de distribución rectangular con límite inferior $a_- = x_i - b_-$ y límite superior $a_+ = x_i + b_+$. En este caso la varianza estándar esta dado por $u^2(x_i) = (a_+ - a_-)/12$ o lo que es lo mismo $u^2(x_i) = (b_+ + b_-)^2/12$. La incertidumbre estándar $u(x_i) = (b_+ + b_-)/\sqrt{12}$.

Ejemplo: si el valor del coeficiente de expansión lineal térmica del ejemplo anterior, se da en el manual como $\alpha_{20}(Cu) = 16{,}52 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1} y se establece que el valor más pequeño posible es $16{,}40 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1} y el valor más grande $16{,}92 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1}, entonces $b_- = 0{,}12 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1} y $b_+ = 0{,}40 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1}. Aplicando las ecuaciones anteriores la incertidumbre estándar es $u(x_i) = 0{,}15 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1}.

5. Si se conoce que existen límites para el estimado x_i, y se sabe que la probabilidad no está uniformemente distribuida y particularmente se tiene mayor densidad de probabilidad al centro que a los extremos.

   En la distribución rectangular debido a que no existía conocimiento específico acerca de los posibles valores de la magnitud X_i dentro de los límites estimados a_+ y a_-, era sensato suponer que el valor de X_i podía ser cualquiera entre estos límites. Sin embargo, tales discontinuidades de la función escalón en una distribución de probabilidad no tienen sentido físico. En muchos casos es más realista esperar que los valores cercanos a los límites sean menos probables que aquellos que están cerca del punto medio.

   Es conveniente reemplazar la distribución rectangular simétrica con una distribución trapezoidal simétrica con igual pendiente en ambos lados, con una base de longitud igual a $2a = a_+ - a_-$, un segmento superior de ancho $2a\beta$, donde $0 \leq \beta \leq 1$. Cuando $\beta \to 1$ la distribución trapezoidal se aproxima a una distribución uniforme, mientras que cuando $\beta \to 0$ la distribución se denomina *distribución triangular*. Para una distribución trapezoidal el valor esperado de X_i es $x_i = (a_+ + a_-)/2$ y la varianza es:

$$u^2(x_i) = a^2(1 + \beta^2)/6$$

Que se convierte en una distribución triangular para β = 0, con varianza

$$u^2(x_i) = a^2/6$$

Debido a que la confiabilidad en las evaluaciones de los componentes de la incertidumbre dependen de la calidad de la información disponible, se recomienda que todos los parámetros que influyen en la medición, sean variados al máximo de manera que las evaluaciones estén basadas tanto como sea posible en datos observados. Debe ser parte del esfuerzo para obtener evaluaciones confiables de las componentes de la incertidumbre el uso de los modelos empíricos del proceso de medición encontrados en base a datos cuantitativos de un período largo y el uso de patrones de calibración y cartas de control que puedan indicar si un proceso de medición está bajo control estadístico.

Es sumamente importante resaltar que las evaluaciones tipo A de la incertidumbre basadas en pocos datos no necesariamente resultan más confiables que las evaluaciones tipo B consideradas.

Se debe ser particularmente cuidadoso de no contar dos veces las componentes de la incertidumbre. Si una componente de incertidumbre que resulta de un efecto en particular se obtiene a partir de una evaluación tipo B, debería incluirse como una componente independiente de incertidumbre en el cálculo de las incertidumbre estándar combinada del resultados de medición, únicamente si el efecto no contribuye a la variabilidad apreciada en las observaciones. Esto es así porque la incertidumbre debida a la porción del efecto que contribuye a la variabilidad observada está incluida en la componente de incertidumbre obtenida a partir del análisis estadístico de las observaciones.

Incertidumbre Estándar Combinada

La incertidumbre estándar combinada es una desviación estándar estimada que caracteriza la dispersión de los valores de los datos de medición que puede ser razonablemente atribuida a la magnitud a medir (mensurando). Su definición en el VIM V002:2007 está dada como incertidumbre estándar de medición obtenida a partir de resultados de medición de las magnitudes de entrada en un modelo de medición

La incertidumbre estándar combinada del resultado de una medición se toma para representar la desviación estándar estimada del resultado. Se obtiene combinando las incertidumbres provenientes de las evaluaciones tipo A y tipo B de la incertidumbre estándar.

Es importante resaltar que la incertidumbre estándar de una corrección estimada aplicada al resultado de una medición para compensar un efecto sistemático, no es el error sistemático en el resultado de la medición. En cambio, éste es una medida de la incertidumbre del resultado debido al conocimiento incompleto del valor de la corrección: los términos error e incertidumbre no deben confundirse.

Se asume que la corrección (o factor de corrección) se aplica para compensar cada efecto sistemático reconocido que influya significativamente en el resultados de una medición y que se ha llevado a cabo un análisis para identificar estos efectos. La incertidumbre relevante a asociar con cada efecto sistemático reconocido, es entonces, la incertidumbre estándar de la corrección aplicada. La corrección puede ser positiva, negativo o cero y su incertidumbre estándar en algunos casos puede ser obtenida de una evaluación tipo A o tipo B.

La incertidumbre estándar combinada es una medida de la incertidumbre ampliamente empleada. Comúnmente, se usa para reportar resultados de determinaciones de constantes fundamentales, investigación fundamental en mediciones y comparaciones internacionales en las determinaciones de las incertidumbres de las unidades del sistema internacional.

Determinación de la Incertidumbre Estándar Combinada

La incertidumbre total de y, donde y es el estimado del mensurando Y y por tanto del resultado de la medición, se obtiene de la apropiada combinación de las incertidumbres estándares de la cantidades de entrada $x_1, x_2, \dots, x_N$. Esta ***incertidumbre estándar combinada*** del estimado y se denota como $u_c(y)$.

La incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ es la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada que se obtiene de:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

Donde se ha considerado que los estimados $x_1, x_2, \ldots, x_N$ provienen de observaciones independientes (**no correlacionados**) y $u(x_i)$ es la incertidumbre estándar evaluada por alguno de los métodos propuestos. La incertidumbre $u(x_i)$ es un estimado de la desviación estándar de la distribución de posibles valores o distribución de probabilidad del estimado *Y*.

La ecuación anterior está basada en una aproximación de la función $Y = f(X_1, X_2, \ldots X_N)$ por una serie de Taylor de primer orden, que se expresa como la ley de propagación de incertidumbres.

Las cantidades $\partial f / \partial x_i$ son las derivadas parciales de $Y = f(X_1, .X_2, \ldots, X_N)$. Estas derivadas, a veces denominadas coeficientes de sensibilidad, describen como el estimado *Y* varia con el cambio en los valores de los estimados $x_1, x_2, \ldots, x_N$. En particular, la variación producida por un pequeño cambio Δx_i de la magnitud con estimado x_i está dada por $(\Delta y)_i = (\partial f / \partial x_i)(\Delta x_i)$. Si el cambio es generado por la incertidumbre estándar $u(x_i)$ del estimado x_i, la incertidumbre correspondiente en *y* es $u_i(y) = (\partial f / \partial x_i) u(x_i)$. La varianza combinada $u_c^2(y)$ se puede interpretar como una suma de términos que representan la varianza del estimado *y* generada por las varianzas (o incertidumbres estándares) de cada estimado x_i. Esto sugiere que se puede expresar matemáticamente como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i) \right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$$

Donde: $c_i \equiv \partial f / \partial x_i , u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i)$.

Ejemplo: De la ley de Ohm se sabe que $V = R \cdot I$, donde *V* es la diferencia de potencial, *R* es el valor estimado de resistencia eléctrica del conductor e *I* es el valor estimado de la corriente eléctrica que lo circula. Establezca una relación para la incertidumbre estándar de *V*.

La relación funcional es *V = f(R,I)*, luego la incertidumbre estándar estará dada por:

$$u_c^2(V) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i) \right]^2$$

Donde x_i representa los estimados de *I* y *R*. Los coeficientes de sensibilidad son:

$$c_1 = \partial V / \partial R = I$$

$$c_2 = \partial V / \partial I = R$$

$$u^2(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 u^2(R) + \left(\frac{\partial V}{\partial I} \right)^2 u^2(I)$$

Y el resultado es:

$$u^2(V) = I^2 u^2(R) + R^2 u^2(I)$$

Los coeficientes de sensibilidad $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$ se calculan normalmente de la relación funcional, sin embargo, se pudiera en algunos casos determinar experimentalmente al observar el cambio en el estimado *y* por un cambio en el estimado del mensurando x_i. En este caso, el conocimiento de la relación funcional (o de una parte de ella) se reduce correspondientemente a una serie de Taylor empírica de primer orden, basado en los coeficientes de sensibilidad medidos.

Si la ecuación para el mensurando $Y = f(X_1, X_2, \ldots X_N)$, se expande alrededor de los valores nominales $X_{i,0}$ de las magnitudes X_i, entonces para el primer orden (que es usualmente una buena aproximación) se tiene $Y = Y_0 + c_1 \cdot \delta_1 + c_2 \cdot \delta_2 + \ldots + c_N \cdot \delta_n$, donde $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \ldots X_{N,0})$, $c_i = \partial f / \partial X_i$ y $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. De acuerdo al resultado anterior y para los propósitos del análisis de incertidumbre, un mensurando puede ser expresado como una suma lineal de sus variables transformando la magnitudes X_i a δ_i.

Ejemplo: En el ejemplo de voltímetro digital (página 41), el estimado para el valor del mensurando *V* es $V = \bar{V} + \Delta\bar{V}$, donde $\bar{V} = 0{,}928\ 571\ V$, $u(\bar{V}) = 12\ \mu V$, la corrección aditiva $\Delta\bar{V} = 0$, y $u(\Delta\bar{V}) = 8{,}7\ \mu V$. Ya que $\partial V / \partial \bar{V} = 1$ y $\partial V / \partial(\Delta\bar{V}) = 1$, la varianza combinada de *V* está dada por:

$$u_c^2(V) = u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta\bar{V}) = (12\,\mu V)^2 + (8{,}7\,\mu V)^2$$

$$u_c^2(V) = 219 \cdot 10^{-12}\ V^2$$

Y la incertidumbre estándar combinada es $u_c(V) = 15\,\mu V$, que corresponde a una incertidumbre estándar combinada relativa de $u_c(V)/V$ de $16 \cdot 10^{-6}$.

El ejemplo anterior expresa la forma como debe evaluarse la incertidumbre estándar combinada cuando el mensurando *Y* es una función lineal de las magnitudes de las que depende, con coeficientes de sensibilidad $c_i = +1$. Entonces, si se tiene una magnitud *Y*, que tiene una relación funcional que puede expresarse como: $Y = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_N \cdot X_n$, y las constantes $c_i = \pm 1$, la incertidumbre estándar combina es:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$$

Incertidumbre Estándar Combinada de Variables Correlacionadas

Las ecuaciones desarrolladas en el punto anterior son válidas en el caso de que las magnitudes X_1, $X_2, \ldots X_N$, sean independientes o ***no correlacionadas***. Esto atañe a las magnitudes como magnitudes aleatorias no como magnitudes físicas que se asume son invariantes.

Si algunas de las magnitudes X_i están significativamente correlacionadas, la correlación debe ser tomada en cuenta. Más aún, se debe distinguir la correlación entre dos magnitudes X_i y X_j de la correlación entre sus estimados x_i y x_j. Aún cuando no exista una correlación real entre X_i y X_j , el estudio de la correlación de sus estimados x_i y x_j. debe incluirse al momento de hacer un tratamiento consistente completo de la incertidumbre de sus estimados.

La expresión de la varianza combinada $u_c^2(y)$ del resultado de medición cuando existe correlación de las magnitudes o de sus estimados es:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)$$

Realizando algunas operaciones:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)$$

Donde:

x_i y x_j son los estimados de X_i y X_j

$u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ es la covarianza estimada de x_i y x_j.

El grado de correlación entre x_i y x_j se obtiene de la ecuación:

$$r(x_i,x_j) = \frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$$

Donde:

- $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ es el coeficiente de correlación
- $-1 \le r(x_i,x_j) \le 1$
- $r(x_i,x_j) = 0$ si x_i y x_j son independientes, es decir, un cambio en uno no implica un cambio en el otro.

La varianza combinada $u_c^2(y)$ del resultado de medición puede escribirse de forma más práctica y compacta como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}c_i{}^2\, u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_i u(x_i)\, c_j u(x_j)\, r(x_i,x_j)$$

El coeficiente de correlación puede ser estimado en términos de la estimación de la varianzas y de la estimación de las covarianzas

$$r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = \frac{s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)}{s(\overline{X}_i)\, s(\overline{X}_j)}$$

El estimado de la covarianza se calcula de acuerdo a la ecuación:

$$s(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{N} (X_{i,K} - \overline{X}_i)(X_{j,k} - \overline{X}_j)$$

Las covarianzas no pueden ser ignoradas si están presentes. Ellas deberían evaluarse experimentalmente, si es viable, variando las magnitudes correlacionadas o usando toda la información disponible de la variabilidad correlacionada de las magnitudes en cuestión. Es conocido que estos estudios son particularmente necesarios para variables que están expuestas a los efectos de las magnitudes de influencia comunes como temperatura ambiente, presión barométrica y humedad. En muchos casos, los efectos de las magnitudes de influencia son suficientemente independientes que las magnitudes de entrada afectadas pueden asumirse que sean no correlacionadas.

Una correlación significativa puede existir entre dos cantidades de entrada si se utiliza para su determinación el mismo instrumento de medición, el mismo patrón o dato de referencia. A manera de ejemplo, si se requiere una corrección de temperatura en la estimación del valor de la magnitud de entrada X_i obtenida usando un cierto termómetro, y una corrección similar de temperatura se necesita en la estimación de la magnitud X_j usando el mismo termómetro, las dos magnitudes de entrada pudieran estar significativamente correlacionadas.

Ejemplo 1: Se desea determinar el volumen *V* de un cilindro utilizando un mismo micrómetro para medir la altura *H* y el diámetro *D*. Encuentre la expresión de la incertidumbre combinada. Determine la correlación entre los estimados de los valores del diámetro y la altura tomando los siguientes valores:

D (cm)	H (cm)
1,007 5	1,010 5
1,008 5	1,011 5
1,009 5	1,011 5
1,006 0	1,011 0
1,008 5	1,010 0
1,008 0	1,011 5

La relación funcional del volumen del cilindro con la altura y el diámetro está dada por *V = f(D,H),* la expresión general de la incertidumbre combinada tomando en cuenta una posible correlación del diámetro y la altura es:

$$u_c^2(V) = c_D^2 u^2(D) + c_H^2 u^2(H) + 2 c_D c_H u(D,H)$$

La covarianza *u(D,H)* es:

$$u(D,H) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{N} (D_k - \overline{D})(H_k - \overline{H})$$

Con $\overline{D} = 1{,}008\ 0$ *cm* y $\overline{H} = 1{,}011\ 0$ *cm* el valor de $u(D,H) = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ *cm.*

Ejemplo 2: Supóngase que *(x_1,y_1), (x_2,y_2),…, (x_i,y_i),…, (x_n,y_n)* son un conjunto de medidas de dos magnitudes a las cuales se ajusta satisfactoriamente una línea recta $y = m \cdot x + b$. Exprese la incertidumbre estándar combinada de la ecuación de la recta $y = m \cdot x + b$, la cual ha sido obtenida usando el método de los cuadrados mínimos.

La incertidumbre estándar combinada del modelo es:

$$\boxed{u^2(y) = u^2(b) + x^2 u^2(m) + 2 \cdot x \cdot u(m) \cdot u(b) \cdot r(b, m)}$$

Anexo B

Incertidumbre Expandida

La mayoría de los grupos de expertos de las diferentes organizaciones de metrología propugnan el uso de la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ como el parámetro para expresar cuantitativamente la incertidumbre en el resultado de una medición.

Se puede establecer que $u_c(y)$ puede ser utilizada universalmente para expresar la incertidumbre en los resultados de medición. En algunos usos comerciales, industriales, en aplicaciones regulatorias y donde la seguridad y la salud estén involucradas, a veces es necesario dar una medida de la incertidumbre que establezca un intervalo alrededor del resultado de medición, dentro del cual se encuentren los valores que pueden ser razonablemente atribuidos al mensurando, con un elevado nivel de confianza.

En reconocimiento a esta necesidad se ha hecho la normalización correspondiente, que dio como resultado la expresión de la incertidumbre expandida.

Determinación de la Incertidumbre Expandida

La medida adicional de la incertidumbre que toma en cuenta los requerimientos de proveer un intervalo y un nivel de confianza, se denomina ***incertidumbre expandida*** y se denota con la letra *"U"*. La incertidumbre expandida se obtiene de multiplicar la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ por un *factor de cobertura k*:

$$\boxed{U = k\,u_c(y)}$$

El resultado de una medición se expresa convenientemente como $Y = y \pm U$, el cual expresa que el mejor estimado atribuible al mensurando Y es y, además el intervalo.

Definido por $Y = y - U$ a $Y = y + U$, contiene con un elevado nivel de confianza p los valores que pueden ser razonablemente atribuidos a la magnitud Y.

Cuando sea posible, el nivel de confianza p asociado con el intervalo de confianza definido por U deberá ser estimado y declarado, puesto que la simple multiplicación de una constante por $u_c(y)$ no da ninguna nueva información, sino que presenta la información previamente disponible en una forma diferente.

La incertidumbre expandida U se utiliza para reportar los resultados de todas las mediciones diferentes de aquellas para las cuales tradicionalmente se ha usado $u_c(y)$. Para ser consistentes con la práctica internacional actual, el valor de *k* que será usado para el cálculo de la incertidumbre expandida es, **por convención**, igual a *k = 2*. Valores diferentes de 2 serán usados únicamente para aplicaciones específicas dictadas por requisitos establecidos y documentados. La elección del factor es un tema a discutir dada la importancia que pudiera tener en algunos casos.

Elección del Factor de Cobertura

El valor del factor de cobertura *k* se determina en base a nivel de confianza requerido para el intervalo *[y - U , y + U]* . En general, *k* tomará valores entre *2* y *3*.

Normalmente, se debe elegir un valor específico del factor de cobertura *k* que determinara un intervalo *[y - U , y + U]* con un nivel de confianza *p* particular, tal como 95 ó 99%. En forma equivalente, para un valor dado de *k*, sería interesante establecer unívocamente el nivel de confianza asociado a este intervalo.

Las recomendaciones internacionales no especifican como deberá establecerse la relación entre el factor de cobertura *k* y su nivel de confianza *p*. No obstante, se puede proponer un enfoque más sencillo, en donde la distribución de probabilidades que caracteriza a la magnitud *Y* en una distribución normal con un número elevado de grados de libertad efectivos. Cuando este es el caso, que ocurre con frecuencia en la práctica, es posible suponer que un factor de cobertura *k = 2*, establece un intervalo con un nivel de confianza del 95%. De igual manera, un factor de cobertura *k = 3*, establece un intervalo con un nivel de confianza del 99%.Si se determina que el número de grados de libertad ν es limitado a un número efectivo de ellos ν_{eff} , entonces se puede utilizar la distribución de Student para estimar el valor del factor de cobertura *k* efectivo.

Reporte de la Incertidumbre

La cantidad de información necesaria al reportar un resultado de medición depende del uso que se vaya a dar a esta información. Sin embargo, existe un principio básico que establece que al reportar el resultado de una medición y su incertidumbre: ***es preferible equivocarse brindando información demás que de menos.***

Aspectos Generales

A continuación se describen algunos aspectos generales que deben observarse al momento de reportar la incertidumbre.

Un reporte completo de la incertidumbre debe:

- Describir claramente los métodos utilizados para calcular el resultado de la medición y su incertidumbre a partir de las observaciones experimentales y de los argumentos utilizados,
- Hacer una lista de todas las componentes de la incertidumbre y documentar totalmente como fueron evaluadas,
- Presentar los análisis de datos de manera tal que cada uno de los pasos importantes puedan ser seguidos de manera sencilla y el cálculo del resultado informado pueda ser repetido de manera independiente en caso de ser necesario.
- Proporcionar todas las correcciones y las constantes utilizadas en el análisis, así como las fuentes de cada una de ellas.

En general, cuando se va hacia abajo en el esquema de jerarquía, se necesitan menos detalles acerca de cómo se realizó la medición, como se calculó el resultado y como fue obtenida la incertidumbre. Cuando se asciende en la cadena de jerarquía el caso es absolutamente lo contrario. La diferencia es que, cuando se desciende en la cadena de jerarquía, mucha de la información necesaria puede estar disponible en la forma de publicaciones de reportes de sistemas de prueba y calibración, especificaciones de prueba, certificados de calibración, manuales de instrucción, normas internacionales y regulaciones nacionales. Un vasto número de instrumentos son fabricados sin reporte alguno de su incertidumbre. Sin embargo, muchos son hechos en base a inspecciones legales. Si se sabe que el instrumento de medición, es conforme con las regulaciones existentes y normas que aplican, las incertidumbres de sus indicaciones se pueden inferir de esas regulaciones y normas.

Reporte de la Incertidumbre Estándar Combinada

Cuando se informa el resultado de una medición y la medida de la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$, se debe:

- Dar una descripción completa de como se define el mensurando *Y*,
- Expresar claramente y sin ambigüedades el estimado *y* del mensurando *Y*, así como su incertidumbre $u_c(y)$. Las unidades de $u_c(y)$ y de *y* deben expresarse,
- Incluir la incertidumbre estándar relativa $u_c(y)/|y| \quad \text{con } |y| \neq 0$, cuando sea apropiado.

El resultado numérico de la incertidumbre estándar combina u_c, puede expresarse en una de las tres maneras siguientes:

Supóngase que se desea reportar la incertidumbre combinada u_c, de una masa patrón m_S de valor nominal *100 g*, entonces se puede expresar en el documento:

1. "m_S = *100,021 47 g* con (una incertidumbre estándar combinada) u_c = *0,35*".
2. "m_S = *100,021 47(35) g*, donde los dígitos entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada) u_c referido a los últimos dígitos correspondientes del resultado".
3. "m_S = *(100,021 47 ±0,000 35) g*, donde el número que sigue al símbolo es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada) u_c y no un intervalo de confianza".

El formato que utiliza el símbolo (±) debe evitarse siempre que sea posible, ya que ha sido usado de manera tradicional para indicar un intervalo de confianza correspondiente a un elevado nivel de confianza y de esta manera puede ser confundido con la incertidumbre expandida.

Reporte de la Incertidumbre Expandida

Cuando la incertidumbre de la medición es la incertidumbre expandida $U = ku_c(y)$, se debe:

- Dar la definición del mensurando *Y,*
- Declarar el resultado de la medición como $Y = y \pm U$ con las unidades apropiadas,
- Dar el nivel de confidencia aproximado que será asociado con el intervalo $[y - U, y + U]$ y como fue determinado.

Cuando se declare un valor de incertidumbre expandida *U,* es preferible, para máxima claridad, dar el resultado numérico de la medición como se indica a continuación:

> "m_S = (100,021 47 $\pm$ 0,000 79) *g*, donde $\pm$ *la incertidumbre* es un intervalo de confianza definido por (una incertidumbre expandida) $U = ku_c$, con *U* determinada de (una incertidumbre combinada) u_c = *0,35 mg* con (factor de cobertura) *k = 2,26* basado en una distribución de Student para $\nu = 9$ grados de libertad y se estima un nivel de confianza del *95%*".

Los valores numéricos del estimado *y* y de su incertidumbre estándar combinada u_c o incertidumbre expandida, no debe darse con un número excesivo de dígitos. Es en la mayoría de los casos suficiente con acotar los valores numéricos a dos dígitos significativos. En algunos casos, se debe retener un dígito adicional a objeto de evitar errores de redondeo en cálculos subsecuentes. En el reporte de los resultados finales, se debe considerar las reglas de redondeo a objeto de mantener una consistencia en el tratamiento de los resultados. Los estimados deben redondearse hasta que sean consistentes con los valores de incertidumbre reportados, por ejemplo y = *10,057 62* Ω con $u_c(y)$ = *27 m*Ω, entonces *y* debe redondearse como y = *10,058* Ω.

Anexo A

Resumen de Procedimientos para la Evaluación de la Incertidumbre

Los procedimientos a ser seguidos para la evaluación y expresión de la incertidumbre del resultado de una medición, se pueden resumir en los siguientes puntos:

1. Exprese matemáticamente la dependencia del mensurando *Y* (magnitud de salida) con las magnitudes de entrada X_i, en la forma $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. Tenga en cuenta en esta ecuación todas las correcciones a realizar, de forma que la ecuación no sea sencillamente la expresión matemática de una ley física, sino una expresión de la relación entre todas las magnitudes que intervienen en el proceso de medición.

   El caso más sencillo que puede presentarse es aquel en el que se realiza la medición de una magnitud en particular con una exactitud tal que se toma como resultado de la medición de *Y* la indicación del instrumento *X* del instrumento de medición utilizado. En este caso, la expresión matemática del proceso de medición es:

$$\boxed{Y = X}$$

   Si se trata de una comparación directa entre un patrón y un instrumento de medición de trabajo durante la calibración de este último, la ecuación es entonces:

$$\boxed{Y = X + \Delta X}$$

2. Determine el valor estimado x_i de cada magnitud de entrada X_i. Este valor estimado puede ser el resultado de una serie de observaciones (en tal caso se evalúa a partir de $\bar{X}$. Se puede tomar como una observación un valor simple proveniente del certificado de calibración de un instrumento de medición o del resultado de mediciones que hayan sido realizadas con anterioridad. También pueden utilizarse valores reportados en manuales y tablas.

3. Calcule el resultado de la medición, es decir, el estimado del mensurando Y a partir de la relación funcional $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, usando para ello las estimaciones de los argumentos $X_1, X_2, \ldots, X_N$.
4. Relacione todas las fuentes de incertidumbre asociadas con las repeticiones de mediciones, con los valores procedentes de mediciones previas (incluye certificados de calibración), con las correcciones realizadas y con las magnitudes de influencia.

   La calibración de los instrumentos de medición involucra la comparación del instrumento de medición a calibrar con un patrón. En general hay que tener en cuenta la incertidumbre que aporta el propio elemento calibrado. En algunos casos, estas componentes de incertidumbre pueden ser pequeñas, si tanto el instrumento calibrado como el patrón responden de la misma manera (muchas veces predecible) a las magnitudes de influencia.

5. Evalúe la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de cada argumento X_i. Para ello se debe tener en cuenta:

   - Si se trata de un valor obtenido a partir de medidas repetidas, se realizará una evaluación tipo A de la incertidumbre estándar, a partir de la ecuación:

$$u(x_i) = s(\overline{X}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}{n(n-1)}}$$

   - En el caso que se mida una sola vez el argumento X_i, la incertidumbre estándar se estima a partir de los valores reportados en el certificado de calibración del instrumento utilizado o del error máximo permisible del mismo establecido en las especificaciones o documentos normativos.

   - Cuando se utilice en calidad de patrones de calibración una combinación de medidas materializadas patrones de un juego, es necesario considerar la correlación entre sus estimados. Por ejemplo, dos o más pesas o al formar combinación de bloques patrones de longitud. Al calcular la incertidumbre resultante del patrón hay que tener en cuenta que entre sus valores reportados en el certificado existe una fuerte correlación. Esto se debe a que han sido obtenidos bajo las mismas condiciones, con el mismo método de medición, los mismos patrones en el mismo proceso de medición. En muchos casos las covarianzas son desconocidas porque usualmente ellas no están dadas en los certificados. En esta situación, la componente de incertidumbre estándar debida al patrón deberá ser calculada de las medidas individuales considerando que la covarianza entre ellas, es tal, que el coeficiente de correlación es igual a 1. Si la magnitud es aditiva, la incertidumbre del patrón será la suma de las incertidumbres de cada medida por separado.

- Una de las fuentes de incertidumbre de un instrumento digital es la debida a su resolución. Si la resolución del dispositivo indicador es δx, el valor del estímulo que produce una indicación *X* dada, puede localizarse con igual probabilidad en cualquier lugar del intervalo $X - \frac{\delta x}{2}$ a $X + \frac{\delta x}{2}$. Entonces, la magnitud *X* se puede describir mediante una distribución uniforme simétrica en la que $a = \frac{\delta x}{2}$, con lo cual la componente de la incertidumbre estándar es:

$$\boxed{u(x) = \frac{(\delta x/2)}{\sqrt{3}} = \frac{\delta x}{\sqrt{12}}}$$

La situación es totalmente semejante para el caso de la apreciación del observador en la lectura de los instrumentos analógicos y se aplicará la misma ecuación anterior, siendo δx, la menor fracción de división apreciada.

6. Determine la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ del resultado de la medición, mediante la ley de propagación de incertidumbres.

7. Exprese la incertidumbre estándar combinada.

8. Determine la incertidumbre expandida.

Anexo B

Ejemplos y Ejercicios Prácticos

Ejemplos:

- Un certificado de calibración declara que la masa de un patrón de acero inoxidable es m_s es 1 000, 000 325 g y que la "incertidumbre es 240 μg al nivel de tres deviaciones estándar". La incertidumbre estándar viene dad como:

$$u_{(m_s)} = \frac{240}{3}\mu g = 80\mu g$$

- Una solución patrón de Pb disponible comercialmente tiene una incertidumbre declarada por el fabricante de (1000 ± 5) mg/l. El valor está dado sin ninguna información acerca de su nivel de confianza o función de distribución.

$$u_{(Pb)} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{,}9ml/l$$

- La incertidumbre suministrada con la información suministrada, lo que nos indica es que puede estar asociada con una función de distribución uniforme, es una incertidumbre estándar tipo B.

- El fabricante asigna para un recipiente volumétrico un valor de 100 ml ± 0,1 ml medido a una temperatura de 20 °C.

$$u_{(v)} = \frac{0{,}1}{\sqrt{3}} = 0{,}058ml$$

- El peso atómico de los elementos está dado (IUPAC, 2001) como:

Elemento	Peso Atómico (g/mol)
C	12,0107(8)
H	1,00794(7)
O	15,9994(3)
K	39,0983(1)

El número entre paréntesis indica la incertidumbre en el último dígito del peso atómico entonces:

Mc=12,0107(8)=12,0107±0,0008

$$u_{(Mc)} = \frac{0,0008}{\sqrt{3}} 0,00046 g/mol$$

M_H=1,00794(7)=1,00794±0,0007

$$u_{(M_H)} = \frac{0,0007}{\sqrt{3}} = 0,00040 g/mol$$

M_O=15,9994(3)=15,9994±0,0003

$$u_{(M_O)} = \frac{0,0003}{\sqrt{3}} = 0,00017 g/mol$$

M_K=39,0983(1)=39,0983±0,0001

$$u_{(M_K)} = \frac{0,0001}{\sqrt{3}} = 0,000058 g/mol$$

Ejercicio Práctico

Se desea calcular la incertidumbre expandida en la calibración de un termómetro líquido en vidrio. En la calibración del termómetro de líquido en vidrio se obtuvo los siguientes datos:

Datos de la Calibración del Termómetro de Líquido en Vidrio.

Puntos a Evaluar.	LP1(ºC)	LI1(ºC)	LP2(ºC)
24	24,015	24	24,015
	24,015	24	24,015
	24,015	24	24,015
34	34,181	34	34,181
	34,181	34	34,181
	34,181	34	34,181

Calcular la

- Repetibilidad de las observaciones en el patrón (S_p).

$$u_{c,1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x - \bar{x}_i\right)^2}{n(n-1)}} = S_{(\bar{x})}$$

- Incertidumbre de la Calibración de los patrones $\overline{L}_p$

$$u_{c,2} = \frac{U}{2}$$

- Resolución del patrón R_p

$$u_{c,3} = \frac{\delta_p}{\sqrt{12}}$$

Donde δ_p es la resolución del patrón.

- Deriva de los patrones D_p.

$$u_{c,4} = \frac{\left|C_1 - C_2\right|}{\sqrt{3}}$$

- Resolución del equipo R_e

$$u_{c,5} = \frac{\delta_e}{\sqrt{12}}$$

Donde δ_e es la resolución del equipo.

- Repetibilidad de las observaciones en el equipo S_e

$$u_{c,6}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x-\bar{x}_i\right)^2}{n(n-1)}}=S_{(\bar{x})}$$

- Estabilidad del Baño E_b

$$u_{c,7}=\frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

Donde Δ expresa la estabilidad del baño y se extrae del certificado de calibración. Δ =0,084ºC a T=24ºC y T=34ºC Δ=0,032ºC

- Partiendo del modelo matemático

$$C=\bar{L}_p+S_p+R_p+D_p+R_e+S_e+E_b-\bar{L}_i$$

Según la Ley de Propagación de Incertidumbre.

$$u_c=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2.\left(u_{x_i}\right)^2} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=1$$

$$u_c=\sqrt{.\left(u_{S_p}\right)^2+\left(u_{L_p}\right)^2+\left(u_{R_p}\right)^2+\left(u_{D_p}\right)^2+\left(u_{R_e}\right)^2+\left(u_{S_e}\right)^2+\left(u_{E_b}\right)^2}$$

- Incertidumbre Expandida.

$$U=k.u_c$$

Donde *k* es el factor de cobertura es igual a 2. Para un nivel de confianza aproximadamente 95%, debido a que los grados efectivos de libertad determinados en las validaciones, son superiores a 100.

- El resultado viene expresado como:

$$C \pm U$$

Resultados

Tabla resumen de los resultados de las fuentes de incertidumbre.

Puntos de Temperaturas	$\overline{L}_p$ (ºC)	$\overline{L}_i$ (ºC)	S_p .(ºC)	R_p (ºC)	D_p. (ºC)	R_e (ºC)	E_b (ºC)	S_e (ºC)
24ºC	24,015	**24**	**0**	$2{,}886x10^{-4}$	0,017	0,0288	0,0242	**0**
34ºC	34,181	**34**	**0**	$2{,}886x10^{-4}$	0,017	0,0288	0,0092	**0**

Incertidumbre Combinada.

Para T=24ºC

$$u_c = \sqrt{.(u_{L_p})^2 + (u_{R_p})^2 + (u_{D_p})^2 + (u_{R_e})^2 + (u_{E_b})^2} = 0{,}0412^{\circ}C$$

Para T=34ºC

$$u_c = \sqrt{.(u_{L_p})^2 + (u_{R_p})^2 + (u_{D_p})^2 + (u_{R_e})^2 + (u_{E_b})^2} = 0{,}0346^{\circ}C$$

Incertidumbre Expandida.

$$U = k.u_c$$

Para T=24ºC

$$U = 0{,}082^{\circ}C$$

Para T=34ºC

$$U = 0{,}069^{\circ}C$$

Expresando el resultado como:
Para el primer valor.

$$\boxed{C = (24{,}015 \pm 0{,}082)^{o}C}$$

Para el segundo valor.

$$\boxed{C = (34{,}181 \pm 0{,}069)^{o}C}$$

Los valores de incertidumbre que calculamos están dentro de los intervalos de los valores correspondientes a una probabilidad del 95% para un factor de cobertura *k*=2.

Bibliografía

AIAG, *Measurment Systems Analysis* (Automotive Industry Action Group, U.S.A., 1995)

Bronshtein I. y Semendiaev K., *Manual de Matemáticas para Ingenieros y estudiantes* (Editorial MIR, Moscú, 1997).

EURACHEM/CITAC. Quantifying uncertainty in analytical measurement (Second Edition. Laboratory of the Government Chemistry, London, UK, 2000).

Gómez L. et al., *Fundamentos de Normalización Metrología y Control de Calidad* (Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1980).

ISO, *Guide to the Expression of Uncertanty in Measurement* (International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1993) .

ISO 10012, *Quality assurance requirement for measuring equiment- Part 1: Metrological confirmation system for measurement equiment. Part 2 Measurement Process Control* (International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1994).

Kohlrausch F., *Praktische Physik: zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik* (B.G. Teuner, Stuttgart, 1985).

Miller J.C. y Miller J.N., *Estadística para Química Analítica* (Addison-Wesley Iberoamericana, E.U.A., 1993).

Piskunov, N., *Cálculo Diferencial e Integral* (Montaner y Simon S.A., Barcelona, 1978).

Profos P. y Pfeifer T., *Handbuch der Industriellen Messtechnik* (R. Oldenburg Verlag München, Wien, 1992).

Taylor B.N. y Kuyatt C.E., *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results* (U.S. Government Printing Office, Washington, 1994).

Warnecke H.J. y Dutschke W., *Fertigungs Messtechnik: Handbuch für Industrie und Wissenschaft* (Springer Verlag, Berlín Heidelberg New York Tokio, 1984).